4. Extrema

Extremstellen einer Funktion sind Hochpunkte (HP), Tiefpunkte (TP) oder Terrassenpunkte (TeP). Wie im Kapitel „Monotonieverhalten“ bereits geklärt wurde, können diese Punkte nur an Stellen mit einer waagrechten Tangente auftreten. Für diese Stellen einer Funktion gilt:

$f'(x) = 0$ → $f(x)$ mit waagrechter Tangente

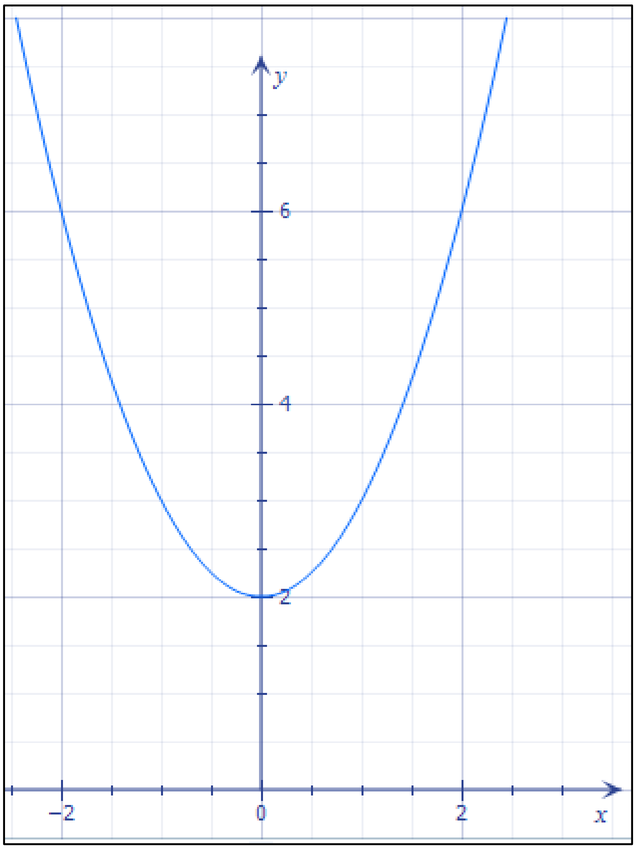
→ Hochpunkt (HP), Tiefpunkt (TP) oder Terrassenpunkt (TeP)

Vorgehen zur Ermittlung der Extrema einer Funktion:

Um die Extrema einer Funktion zu berechnen, gibt es prinzipiell zwei verschiedene Varianten/Lösungswege:

Variante A:

„Mit Hilfe des Monotonieverhaltens“

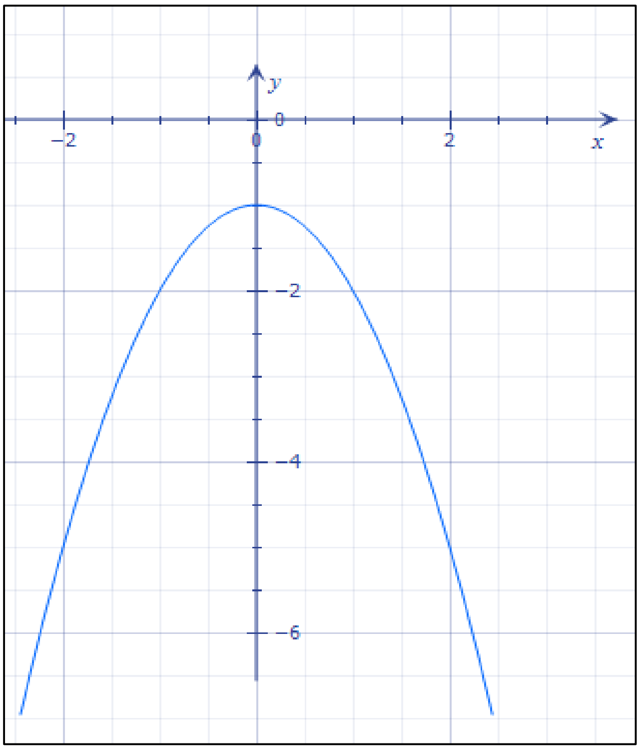


Wie man an der nebenstehenden Funktion erkennen kann, handelt es sich bei der waagrechten Tangente (hier bei x = 0) um einen **Tiefpunkt.** Für das Monotonieverhalten gilt folgendes:

x < 0: $f'(x) < 0$ → G_f ist smf

x > 0: $f'(x) > 0$ → G_f ist sms

Falls die Funktion vor der waagrechten Tangente fällt und danach steigt, handelt es sich also um einen Tiefpunkt.

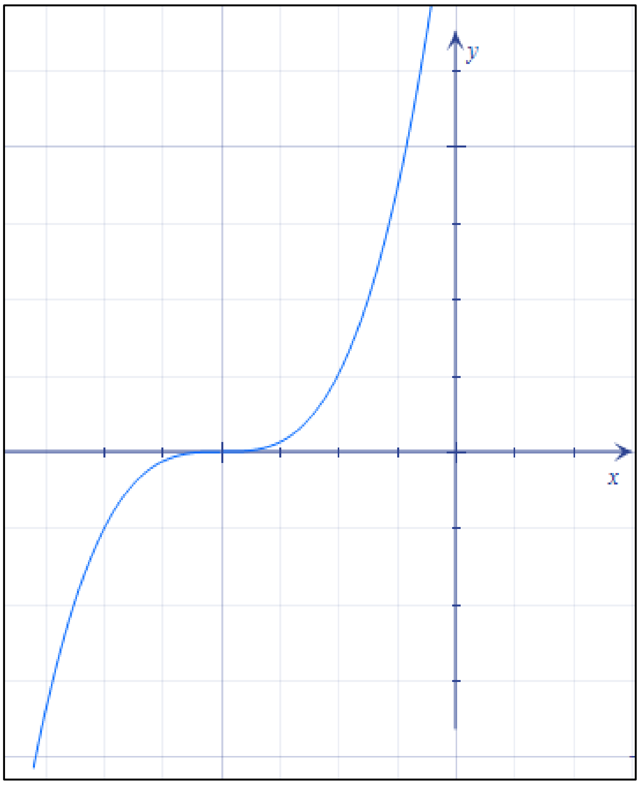


Wie man an der nebenstehenden Funktion erkennen kann, handelt es sich bei der waagrechten Tangente (hier bei x = 0) um einen **Hochpunkt.** Für das Monotonieverhalten gilt folgendes:

x < 0: $f'(x) > 0$ → G_f ist sms

x > 0: $f'(x) < 0$ → G_f ist smf

Falls die Funktion vor der waagrechten Tangente steigt und danach fällt, handelt es sich also um einen Hochpunkt.



Wie man an der nebenstehenden Funktion erkennen kann, handelt es sich bei der waagrechten Tangente (hier bei x = - 2) um einen **Terrassenpunkt.** Für das Monotonieverhalten gilt folgendes:

x < - 2: $f'(x) > 0$ → G_f ist sms

x > - 2: $f'(x) > 0$ → G_f ist sms

<u>oder (auch möglich):</u>

x < - 2: $f'(x) < 0$ → G_f ist smf

x > - 2: $f'(x) < 0$ → G_f ist smf

Falls die Funktion vor der waagrechten Tangente steigt und danach ebenfalls steigt (analog dem obenstehenden Graph) oder die Funktion vor und nach der waagrechten Tangente fällt, handelt es sich um einen Terassenpunkt.

Und so funktioniert es:

a) $f'(x)$ ermitteln

b) $f'(x) = 0$ und nach x auflösen

→ alle Punkte mit waagrechter Tangente (wT)

c) Intervalle aufstellen (Immer ein Intervall mehr als waagrechte Tangenten)

d) Für jedes Intervall prüfen, ob die Funktion fällt (smf) oder steigt (sms)

(Die Punkte a) bis d) entsprechen 1 zu 1 dem Vorgehen zur Ermittlung des Monotonieverhaltens, siehe Kapitel „Monotonieverhalten“).

e) Funktion fällt vor der wT und steigt danach → TP

Funktion steigt vor der wT und fällt danach → HP

Funktion steigt vor und nach der wT → TeP

Funktion fällt vor und nach der wT → TeP

Diese Variante sollte man immer anwenden, falls in einer Teilaufgabe bereits das Monotonieverhalten ermittelt worden ist bzw. die Variante B für die jeweilige Aufgabe zu komplex erscheint.

Bevor wir zu einem Beispiel kommen, zunächst noch das zweite Verfahren:

Variante B:

„Mit Hilfe der zweiten Ableitung ($f''(x)$)“

Diese Variante lernt man in der Schule, wenn überhaupt, erst in der 12. Klasse, da sich die meisten davor nicht mit einer zweiten Ableitung beschäftigen. Trotzdem kann diese Variante an der Stelle viel schneller als Variante A sein, sodass sie auf jeden Fall gekonnt werden sollte.

Für was die zweite Ableitung steht, warum es sie gibt, erfahren wir im Kapitel „Krümmungsverhalten“ und im Kapitel „Wendepunkte“. Für dieses Kapitel muss man nur wissen, wie eine zweite Ableitung zu bilden ist und das ist im Prinzip schnell erklärt und total einfach:
Die zweite Ableitung ist nichts anderes als die Ableitung der ersten Ableitung. Leitet man also $f'(x)$ mit den bekannten Regeln noch einmal ab, erhält man $f''(x)$. Dieses Wissen reicht an der Stelle, um Variante B anwenden zu können.

Und so funktioniert es:

a) $f'(x)$ ermitteln

b) $f'(x) = 0$ und nach x auflösen
→ alle Punkte mit waagrechter Tangente (wT)

(Die beiden Punkte a) und b) sind identisch zu den ersten beiden Schritten aus Variante A.)

c) $f''(x)$ ermitteln

d) Alle waagrechten Tangenten aus Schritt b) in die zweite Ableitung nacheinander einsetzen

e) $f''(wT) > 0$ → Tiefpunkt

$f''(wT) < 0$ → Hochpunkt

$f''(wT) = 0$ → Terassenpunkt

Warum es sich z.B. bei der waagrechten Tangente um einen Tiefpunkt handelt, sobald die 2. Ableitung positiv ist, muss in diesem Kapitel nicht verstanden werden. Für dieses Kapitel reicht es, das Vorgehen auswendig zu lernen. In den nächsten beiden Kapiteln wird dann auf die Thematik der 2. Ableitung kurz eingegangen.

Dieses Vorgehen ist dann zu empfehlen, wenn das Monotonieverhalten nicht gefragt ist, die 2. Ableitung leicht zu errechnen ist oder in weiteren Teilaufgaben Wendepunkte (siehe nächstes Kapitel) berechnet werden müssen.

Beispiel 1:

$f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 5$

Auch diese Funktion ist eine recht einfache, da hier erstmal nur das Verfahren prinzipiell erläutert werden soll.

$f'(x) = 9x^2 - 10x$

$f'(x) = 0$

$9x^2 - 10x = 0$ („x“ ausklammern → erspart die MNF)

$x(9x - 10) = 0$ → $x_1 = 0$

$9x - 10 = 0$

$9x = 10$ → $x_2 = \frac{10}{9}$

Diese beiden Werte sind also die waagrechten Tangenten der Funktion. Diese müssen für Variante A und für Variante B berechnet werden. Im Folgenden wird die Aufgabe mit Hilfe beider Varianten gelöst:

Variante A: (Monotonieverhalten)

Intervalle:

$]-\infty\,;0[\quad u \quad]0\,;\frac{10}{9}[\quad u \quad]\frac{10}{9} + \infty[$

Für das **erste Intervall** $]-\infty\,;0[$ gilt:

→ z.B. den Wert - 1 in $f'(x)$ einsetzen: $f'(-1) = 19$

→ $f'(x)$ im Intervall 1 positiv

→ Graph von $f(x)$ ist sms

Für das **zweite Intervall** $]0\,;\frac{10}{9}[$ gilt:

→ z.B. den Wert 1 in $f'(x)$ einsetzen: $f'(1) = -1$

→ $f'(x)$ im Intervall 2 negativ

→ Graph von $f(x)$ ist smf

Für das **dritte Intervall** $]\frac{10}{9}\,;+\infty[$ gilt:

→ z.B. den Wert 2 in $f'(x)$ einsetzen: $f'(2) = 16$

→ $f'(x)$ im Intervall 3 positiv

→ Graph von $f(x)$ ist sms

Daraus ergeben sich folgende **Extrema**:

Bei x = 0: zuerst sms (Intervall 1), dann smf (Intervall 2) → HP (0 / f(0)) → HP (0/-5)

Bei x = $\frac{10}{9}$: zuerst smf (Intervall 2), dann sms (Intervall 3) → TP ($\frac{10}{9}$ / f($\frac{10}{9}$)) → TP ($\frac{10}{9}$/-7)

Diese Funktion besitzt also einen Hochpunkt bei x = 0 und einen Tiefpunkt bei x = $\frac{10}{9}$. Bitte nicht vergessen, zu den jeweiligen x-Werten auch die y-Werte anzugeben, damit es sich auch tatsächlich um einen Punkt handelt. Dazu einfach den x-Wert der Extremstelle in die Ausgangsfunktion einsetzen. → Taschenrechner

Nun die Berechnung der Extrema mit Hilfe der zweiten Variante, die, wenn man nichts falsch macht, natürlich zu den gleichen Lösungen führen sollte.

Variante B: (2. Ableitung)

$f''(x) = 18x - 10$ [Nochmal: $f''(x)\ ist\ die\ 1. Ableitung\ von\ f'(x)$]

Jetzt beide wT`s in die 2. Ableitung einsetzen:

$f''(0) = -10$ → $f''(x) < 0$ → HP bei (0/-5)

$f''\left(\frac{10}{9}\right) = 10$ → $f''(x) > 0$ → TP bei ($\frac{10}{9}$/-7)

Auch hier ergibt sich ein Hochpunkt bei x = 0 und ein Tiefpunkt bei x = $\frac{10}{9}$. Beide Varianten führen also zum gleichen Ziel. In diesem Fall wäre es jedoch mit Variante B schneller gegangen, da die 2. Ableitung hier recht leicht zu bestimmen war.

Klären wir dieses Thema zum Abschluss auch noch an der altbekannten Funktion aus dem 1. Teil der Kurvendiskussion:

Beispiel 2:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2}$$

Die erste Ableitung dieser Funktion wurde bereits im letzten Kapitel „Monotonieverhalten“ berechnet und lautet:

$$f'(x) = \frac{x^2 * 1 - (x+2) * 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - (2x^2 + 4x)}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 - 4x}{x^4} = \frac{-x^2 - 4x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x(-x-4)}{x^4} = \frac{-x-4}{x^3}$$

Da uns für diese Funktion bereits das Monotonieverhalten aus dem letzten Kapitel vorliegt und zudem die 2. Ableitung hier nicht ganz so leicht zu berechnen ist, werden die Extrema hier mit Hilfe der Variante A bestimmt:

$$\frac{-x-4}{x^3} = 0$$

$$-x-4 = 0$$

$x = -4$ (waagrechte Tangente)

Da die Funktion bei x = 0 eine Polstelle ohne VZW hat, hatten sich folgende Intervalle ergeben:

$]-\infty\,; -4[\quad u \quad]-4\,;\ 0[\quad u \quad]0 + \infty[$

Für das **erste Intervall** $]-\infty\,; -4[$ gilt:

→ Graph von $f(x)$ ist smf

Für das **zweite Intervall** $]-4\,; 0[$ gilt:

→ Graph von $f(x)$ ist sms

Für das **dritte Intervall** $]0\,; +\infty[$ gilt:

→ Graph von $f(x)$ ist smf (siehe Kapitel „Monotonieverhalten“)

Bis jetzt ist das nichts Neues im Vergleich zum Monotonieverhalten aus dem letzten Kapitel. Nun kann man im letzten Schritt ganz einfach die **Extrema** bestimmen:

Bei x = - 4: zuerst smf (Intervall 1), dann sms (Intervall 2) → TP (-4 / f(-4)) → TP (-4/-0,125)

Bei x = 0: Kein Extrema, da diese Intervallgrenze nicht aufgrund einer waagrechten Tangente, sondern aufgrund der Polstelle mit VZW entstanden ist. Somit ist an dieser Stelle die Betrachtung der Extrema nicht relevant.