1. Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

Nachdem wir schon die gegenseitige Lage zweier Geraden und zweier Ebenen geprüft haben, fehlt noch die Lagebeziehung zwischen einer Gerade und einer Ebene. Die möglichen Lagen sind hier genau die gleichen, wie bei der gegenseitige Lage von zwei Ebenen:

Gerade und Ebene können parallel sein, ggf. sind sie dann sogar identisch, die Gerade liegt also in der Ebene, oder sie schneiden sich, allerdings in einem Punkt und nicht in einer Gerade. Das Vorgehen ist bei diesem Thema aber sehr einfach, vorausgesetzt, man hat eine Ebene in der Koordinatenform vorliegen. Dann kann man nämlich, statt die Gerade und die Ebene gleichzusetzen, die Gerade in die Normalenform der Ebene für x_1, x_2, x_3 einsetzen.

Um die Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene zu prüfen, setzt man immer die Gerade in die Normalenform der Ebene ein (ähnlich der Berechnung einer Schnittgerade von zwei Ebenen, siehe Thema „Ebenen"). Am Ergebnis der Gleichung erkennt man dann die Lage zwischen der Gerade und Ebene.

Dieses Thema ist also etwas einfacher und weniger zeitaufwendig, wie das Prüfen der Lage zweier Ebenen. Bei 2 Ebenen setzt man eine komplette Ebene in die andere ein und erhält damit eine Gleichung mit 2 Unbekannten (siehe Kapitel „gegenseitige Lage von Ebenen"). Nachdem man hier „nur" eine Gerade in die Ebene einsetzt erhält, man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, die man anschließend relativ schnell auflösen kann.

Voraussetzung:

Gerade in Parameterform	(eine andere Form gibt es auch nicht)
Ebene in Normalenform	(ggf. von Parameterform umwandeln)

Vorgehen:

Gerade in Ebene einsetzen: $g(\vec{X}) \cap E(\vec{X})$

λ fällt weg & 0 = 0	λ fällt weg & k $\neq$ 0	$\lambda = \dots$
IDENTISCH	PARALLEL	SCHNITTPUNKT

Falls sich die Gerade und Ebene schneiden, setzt man das berechnete λ in die Gerade ein und erhält damit den Schnittpunkt.

Beispiel 1:

Bestimmen Sie die Lage zwischen der Gerade $g(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Ebene

$E\colon\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 9 = 0.$

Lösung:

3 Gleichungen der Gerade:

I. $1 + \lambda$ -> für x_1 in Ebene

II. $2 - 2\lambda$ -> für x_2 in Ebene

III. $-3 + 2\lambda$ -> für x_3 in Ebene

$g(\vec{X}) \cap E(\vec{X})$:

$$(1 + \lambda) - 2 * (2 - 2\lambda) + 2 * (-3 + 2\lambda) - 9 = 0$$

$$1 + \lambda - 4 + 4\lambda - 6 + 4\lambda - 9 = 0$$

$-18 + 9\lambda = 0$ / +18 ; : 9 (Ab hier wissen wir, dass es einen SP gibt, da λ nicht weggefallen ist.)

$\lambda = 2$

Schnittpunkt (SP):

λ in $g(\vec{X})$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt lautet also SP (3/-2/1).

Beispiel 2:

Bestimmen Sie die Lage zwischen der Gerade $g(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und der Ebene $E\colon\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 12 = 0$.

Lösung:

$g(\vec{X}) \cap E(\vec{X})$:

$(0 + \lambda) + 5 * (0 + \lambda) + 2 * (6 - 3\lambda) - 12 = 0$

$\lambda + 5\lambda + 12 - 6\lambda - 12 = 0$

$6\lambda - 6\lambda + 12 - 12 = 0$

$0 = 0$

→ Die Gerade und die Ebene sind identisch. Die Gerade $g(\vec{X})$ liegt demnach in der Ebene E.

Achtung:

Dieses Kapitel ist extrem wichtig. Es ist eines der wichtigsten, wenn nicht sogar das wichtigste Kapitel in der Vektorrechnung. Dies liegt daran, dass uns dieses Thema bei sehr vielen Aufgaben helfen kann. Oftmals steht in der Aufgabenstellung nichts von einer gegenseitigen Lage von Gerade und Ebene und trotzdem benötigen wir als Lösungsansatz genau diese Thematik. Vor allem bei den etwas komplexeren Aufgaben ist die (Teil-)lösung oft das Thema „Schnittpunkt von Gerade und Ebene“. Daher sollte dieses Kapitel besonders intensiv geübt werden, auch wenn es nicht besonders schwierig ist.