4. „3 x mindestens"-Aufgabe bei Bernoulli

Diese Aufgabe bei Bernoulli ist eine Besonderheit und wird in den meisten Abituren verlangt. Sie heißt „3 x mindestens"-Aufgabe, weil in der Angabe 3-mal das Wort „mindestens" oder ein Synonym, wie „wenigstens", vorkommt. Daran ist dieser Aufgabentyp auch im Abitur sehr leicht zu erkennen. Im Gegensatz zu allen bisherigen Bernoulli-Aufgaben ist hier die Wahrscheinlichkeit bereits gegeben, dafür ist meistens „n" oder hin und wieder „q" gesucht. Die Aufgabe verlangt fast immer, dass man die Anzahl der Versuche „n" berechnet, um mit einer gewissen, gegebenen Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Treffer zu erlangen.

„Mindestens ein Treffer" wird hier immer mit dem Gegenereignis „kein Treffer" gelöst. Daher ist der Ansatz immer: $1 - q^n \geq P(x)$, wobei „q" oder „n" gegeben ist. $P(x)$ ist auch immer angegeben. Es gibt zwei verschiedene Vorgehen, um entweder „n" oder „q" zu berechnen. Beide Vorgehen können auswendig gelernt werden, sodass die Aufgaben im Abi wirklich schnell und einfach erledigt werden können.

„q" gesucht:

$1 - q^n \geq P(x)$	$/ -1$
$-q^n \geq P(x) - 1$	$/* (-1)$ Rechenzeichen dreht sich hier um, weil mit einer negativen Zahl multipliziert wurde.)
$q^n \leq -(P(x) - 1) = q^n \leq 1 - P(x)$	$/ \sqrt[n]{}$
$q = \sqrt[n]{[1 - P(x)]}$	(Am Ende immer ein „=")

Dieses Vorgehen mit diesem Ansatz kann immer gewählt werden, wenn man eine „3 x mindestens" Aufgabe lösen will und die Wahrscheinlichkeit für „q" gesucht ist. Zum Teil ist bei diesen Aufgaben „p" und nicht „q" gesucht. Man berechnet trotzdem mit dem obigen Vorgehen „q" und muss dann noch durch „1 – q" die Wahrscheinlichkeit für „p" berechnen.

Nun noch das Vorgehen, falls „n" gesucht ist, auch mit dem gleichen Ansatz:

„n“ gesucht:

$1 - q^n \geq P(x)$ $\quad$ / -1

$-q^n \geq P(x) - 1$ $\quad$ / $*(-1)$

$q^n \leq -(P(x) - 1) = q^n \leq 1 - P(x)$ $\quad$ / ln

(Rechenzeichen dreht sich hier um, weil mit einer negativen Zahl multipliziert wurde.)

$\ln q^n \leq \ln(1 - P(x))$ $\quad$ (3. log-Gesetz, siehe Grundwissen.)

$n * \ln q \leq \ln(1 - P(x))$ $\quad$ / $: \ln q$

$n \geq \frac{\ln(1-P(x))}{\ln q}$ $\quad$ (Vorzeichen dreht sich wieder um, weil diesmal durch eine negative Zahl dividiert wird. „q“ ist immer zwischen 0 und 1, in diesem Bereich ist die ln-Funktion negativ, siehe Thema „ln-Funktion“.)

Das Ergebnis für „n“ muss an dieser Stelle immer aufgerundet werden, egal ob es mathematisch richtig ist. Auch dieses Vorgehen kann einfach auswendig gelernt werden und sichert im Abi schnell relativ viele Punkte (meistens wird diese Aufgabe mit 5 BE bepunktet).

Beispiel 1:

Eine Urne enthält insgesamt 100 Kugeln, davon 40 rote und 60 weiße. Wie viele Kugeln muss man mindestens ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 %, mindestens eine weiße Kugel zu ziehen?

Lösung:

n = ?

P(x) = 0,90 $\quad$ (gegebene Wahrscheinlichkeit = 90 %)

p = $\frac{60}{100} = 0{,}6$ $\quad$ (60 von 100 Kugeln sind weiß)

q = 1 – 0,6 = 0,4 (40 von 100 Kugeln sind rot)

$1 - q^n \geq P(x)$

$1 - 0{,}4^n \geq 0{,}9$ $\quad / -1$

$-0{,}4^n \geq -0{,}1$ $\quad / * (-1)$

$0{,}4^n \leq 0{,}1$ / ln

$\ln 0{,}4^n \leq \ln 0{,}1$

$n * \ln 0{,}4 \leq \ln 0{,}1$ / : ln 0,4

$$n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}4}$$

$n \geq 2{,}51$ **Man muss mindestens 3 Kugeln ziehen.**

Beispiel 2:

Eine Urne enthält insgesamt 100 Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel in der Urne, wenn man insgesamt 20-mal ziehen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % eine weiße Kugel zu ziehen?

Lösung:

p = ? (Es geht in dem Experiment um die weißen Kugeln, deshalb ist ein Treffer eine weiße Kugel.)

n = 20

P(x) = 0,85

$1 - q^n \geq P(x)$

$1 - q^{20} \geq 0{,}85 \qquad / -1$

$-q^{20} \geq -0{,}15 \qquad / * (-1)$

$q^{20} \leq 0{,}15 \qquad / \sqrt[20]{}$

$q = \sqrt[20]{0{,}15}$

$q \approx 0{,}9095 \approx 90{,}95\ \%$

→ $p = 1 - 0{,}9095 = 0{,}0905 = 9{,}05\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel (Treffer) beträgt 9,05 %.