1. Definitionsmenge

Definitionsmenge, ist die Menge aller Zahlen, die man in eine Funktion für x einsetzen darf. Falls alle Zahlen eingesetzt werden dürfen, ist die Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$

1.1 Zahlen aus der Definitionsmenge ausschließen

Aus dieser Menge aller Zahlen muss man prinzipiell drei Aspekte ausschließen, da sie mathematisch nicht erlaubt sind:

a) Falls die Funktion ein Bruch ist, darf der Nenner nicht 0 werden.

b) Unter der Wurzel darf nichts Negatives stehen.

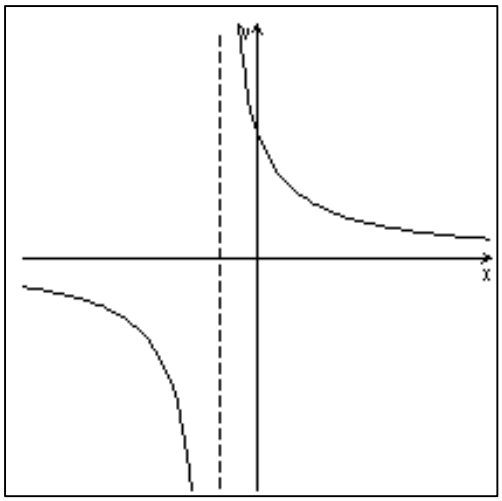
c) In einen Logarithmus darf nicht 0 oder Negatives eingesetzt werden.

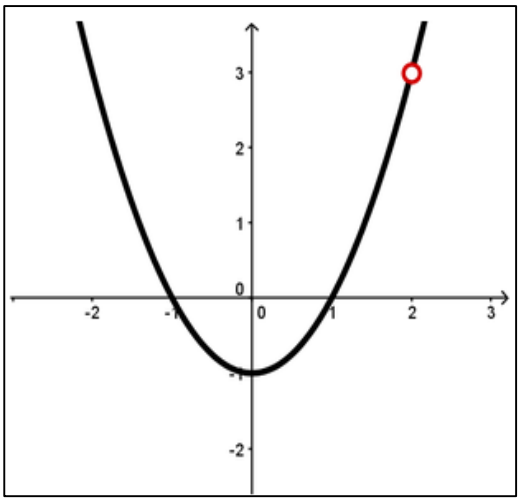
Für alle Funktionen, in denen nicht mindestens einer der obigen drei Aspekte vorkommt, ist die Definitionsmenge ganz R: $D_f = \mathbb{R}$

Die Punkte 1.2 und 1.3 werden in der Aufgabenstellung nicht explizit gefragt, man ist also prinzipiell nach dem Punkt 1.1 fertig. Allerdings sollte man zusätzlich auch die anderen beiden Punkte abhandeln, da sie im weiteren Verlauf der Kurvendiskussion sehr nützlich werden können. Auch wenn es in dieser Teilaufgabe darauf keine Punkte gibt, da es nicht gefragt ist, sollte man dennoch die Punkte 1.2 und 1.3 behandeln, da man anschließend dadurch viel leichter und auch schneller den Rest der Kurvendiskussion bearbeiten kann.

1.2 Definitionslücke oder senkrechte Asymptote ?

Bei den Zahlen, die man eben aus der Definitionsmenge ausgeschlossen hat, sollte man sich zunächst fragen, um was es sich hierbei genau handelt. Ausgeschlossene Zahlen können entweder Definitionslücken oder senkrechte Asymptoten, auch Polstellen, oder nur Pole genannt, sein. Hier erstmal zeichnerisch der Unterschied zwischen den beiden:





Polstelle bei x = - 1

Definitionslücke bei x = 2

Rechnerisch ist es sehr simple zu ermitteln, ob es sich bei den ausgeschlossenen Zahlen um Definitionslücken oder Polstellen handelt:

a) Ist die Funktion kein Bruch, gibt es keine einzeln ausgeschlossenen Zahlen, somit zunächst weder Polstellen, noch Definitionslücken. Falls man Zahlen aufgrund der ln-Funktion oder einer Wurzel ausschließen muss, handelt es sich hierbei immer um ganze Bereiche, die ausgeschlossen werden müssen. Dadurch ist mindestens ein Rand des Definitionsbereichs nicht mehr ∞, sondern eine bestimmte Zahl. Sollte diese Intervallgrenze zudem aus der Definitionsmenge ausgeschlossen sein, bildet die Zahl automatisch eine senkrechte Asymptote. In Frage kommt hier im Prinzip nur die ln-Funktion (siehe dazu Kapitel „e- und ln-Funktion“), da eine Wurzelfunktion 0 werden darf und deshalb die Zahl, die die Grenze des Definitionsbereichs bildet immer eingeschlossen ist (siehe Beispiel 2 und 3). Eine Funktion, die kein Bruch ist, hat in jedem Fall keine Definitionslücken.

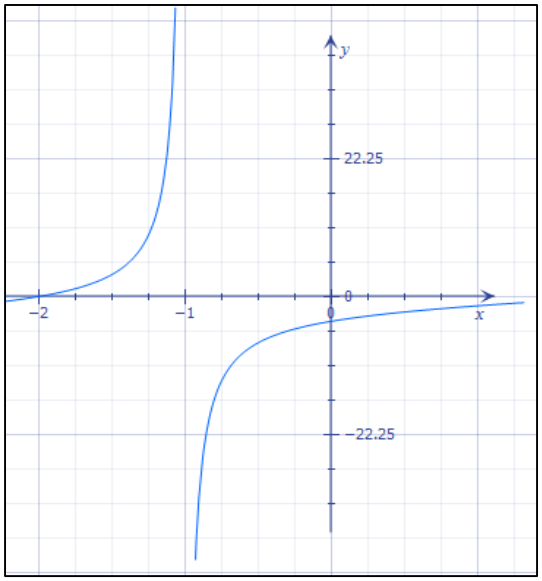
b) Handelt es sich um eine gebrochen-rationale-Funktion, also um einen Bruch, setzt man die ausgeschlossenen Zahlen der Reihe nach in den Zähler ein:

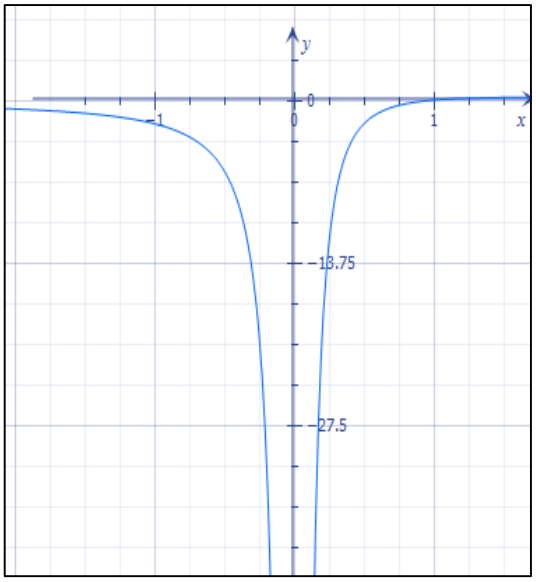
Zähler = 0: Ausgeschlossene Zahl ist eine Definitionslücke

Zähler≠ 0: Ausgeschlossene Zahl ist eine Polstelle

1.3 Vielfachheit der Polstellen bestimmen

Die Vielfachheit jeder einzelnen Polstelle erkennt man an dem jeweiligen Exponenten des x-Wertes, durch den die Polstelle aus der Definitionsmenge ausgeschlossen wurde. Es gibt zwei grundsätzliche Arten von Polstellen, wie man hier sieht:





Links: Polstelle bei x = - 1: Pol mit Vorzeichenwechsel (mit VZW)

VZW bedeutet, dass sich die Funktion auf einer Seite des Pols gegen $+\infty$ nähert und auf der anderen Seite gegen $-\infty$, wie hier in diesem Beispiel. Die Funktion könnte aber auch links vom Pol gegen $-\infty$ und rechts gegen $+\infty$ laufen.

Mit VZW, wenn Pol aus einem x^1, x^3, x^5 etc. hervorgeht, also bei einem <u>ungeraden Exponenten</u>

Rechts: Polstelle bei x = 0: Pol ohne Vorzeichenwechsel (ohne VZW)

Ohne VZW bedeutet, dass die Funktion auf beiden Seiten des Pols nach oben verläuft (gegen $+\infty$) oder wie in diesem Beispiel auf beiden Seiten nach unten ($-\infty$) geht.

Ohne VZW, wenn Pol aus einem x^2, x^4, x^6 etc. hervorgeht, also bei einem <u>geraden Exponenten</u>

Beispiel 1:

Die folgende Funktion wird uns nicht nur in diesem Kapitel begleiten, sondern in der kompletten Kurvendiskussion, damit, wie im Abitur, alle Themen an einer Aufgabe geübt werden können.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 * (x - 2)}$$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{0,2\}$ (In dieser Funktion darf nur der Nenner nicht 0 werden. Ein Logarithmus oder eine Wurzel kommen nicht vor. Da der Nenner ein Produkt ist, sind seine NST sofort abzulesen)

Bei x = 0:	Polstelle	(die Zahl 0 in den Zähler eingesetzt ergibt - 4 und - 4 ≠0)
Bei x = 2:	Definitionslücke	(die Zahl 2 in den Zähler eingesetzt ergibt 0)

Zum Schluss dieser Aufgabe stellen wir uns noch die Frage, um welche Art von Polstelle es sich handelt:

Polstelle bei x = 0: Die „0“ wurde wegen dem x^2 im Nenner ausgeschlossen.

x^2 = gerader Exponent → Polstelle ohne VZW

(Ob die Funktion sich auf beiden Seiten des Pols gegen $+\infty$ oder auf beiden Seiten gegen $-\infty$ nähert, wissen wir an dieser Stelle noch nicht. Dies wird im Kapitel „Grenzwerte“ geklärt.)

(Bei x = 2 stellen wir uns die Frage nach der Vielfachheit und dem VZW nicht, da es sich dabei nicht um ein Pol, sondern um eine Definitionslücke handelt.)

Achtung:

Die Definitionsmenge muss nicht immer in dieser Schreibweise angegeben werden:

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{\dots\}$

Diese Schreibweise bietet sich immer dann an, wenn einzelne Zahlen aus der Defnitionsmenge ausgeschlossen werden. Also vor allem dann, wenn die Funktion gebrochen-rational ist, da bei diesen Funktionen der Nenner nicht 0 werden darf.

Bei Funktionen mit einer Wurzel oder ln-Funktionen bietet sich diese Schreibweise nicht an, da hier nicht nur einzelne Zahlen ausgeschlossen werden müssen, sondern komplette Intervalle. Beide Funktionen dürfen nicht negativ werden, zudem darf die ln-Funktion nicht 0 werden, sodass sich hier eine Intervallschreibweise anbietet. Um die Grenze des Intervalls zu finden, sollte die Funktion in der Wurzel bzw. im ln gleich 0 gesetzt werden.

Beispiel 2:

$f(x) = \sqrt{x+3}$ (Diese Funktion wird 0 bei x = - 3. Alle Zahlen, die kleiner als - 3 sind, würden einen negativen Wert unter der Wurzel mit sich ziehen und müssen deshalb ausgeschlossen werden.)

→ $D_f: [-3\,;\ +\infty[$ (Zahlen die mindestens -3 oder größer sind, dürfen in die Funktion für „x“ eingesetzt werden und bilden deshalb die Definitionsmenge. Die Zahl - 3 ist hier eingeschlossen, da die Wurzel auch „0“ werden darf.)

Im Übrigen hat diese Funktion keine Definitionslücken, da die Funktion nicht gebrochen-rational ist. Sie besitzt auch keine senkrechte Asymptote, also Polstelle. Zwar ist der linke Rand der Definitionsmenge in diesem Fall eine Zahl, nämlich - 3, jedoch ist diese Zahl in der Definitionsmenge eingeschlossen und bildet somit keine Polstelle.

Beispiel 3:

$f(x) = \ln(4x-2)$

Nebenrechnung:

$4x - 2 = 0$

$4x = 2$

$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Diese Teilfunktion wird 0 bei x = 0,5. Alle Zahlen, die kleiner als 0,5 sind, würden einen negativen Wert mit sich ziehen und müssen deshalb ausgeschlossen werden.

→ $D_f:]0{,}5\ ;\ +\infty[$

Zahlen die mindestens 0,5 oder größer sind, dürfen in die Funktion für „x“ eingesetzt werden und bilden deshalb die Definitionsmenge. Die Zahl 0,5 ist hier ausgeschlossen, da die ln-Funktion auch nicht „0“ werden darf (Genaueres zu ln-Funktion im Kapitel „e- und ln-Funktion).

Auch diese Funktion besitzt keine Definitionslücken, aber eine senkrechte Asymptote bei x = 0,5. Grund dafür ist, dass der linke Rand der Definitionsmenge eine ausgeschlossene Zahl ist (siehe dazu Kapitel „e- und ln-Funktion“). In diesem Fall muss man sich über die Vielfachheit der Polstelle keine Gedanken machen, da die Funktion nur rechts der Polstelle verlaufen kann. Der Bereich links der Polstelle ist in diesem Beispiel nicht definiert, sodass dort die Funktion nie verlaufen wird. Daher macht es nie Sinn die Vielfachheit einer Polstelle zu betrachten, die aus einer Intervallgrenze der Definitionsmenge hervorgeht.